Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л. Н. МАРЧЕНКО,
Л. В. ФЕДОСЕНКО,
Ю. С. БОЯРОВИЧ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА: ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Практическое руководство
для студентов специальности
1-25 01 04 «Финансы и кредит»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины

2014

К 519. 2: 336 (076)
Ꮯ 65. 26 в 631 я 73
М 30

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук В. Н. Семенчук;
канд. физ.-мат. наук Л. П. Авдашкова
кафедра финансов и кредита;

Рекомендовано к изданию научно методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

М 30 **Марченко, Л. Н.**

Финансовая математика: потоки платежей: практ. рук-во / Л. Н. Марченко, Л. В. Федосенко, Ю. С. Боярович; М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 48 с.

В практическом руководстве изложены теоретические основы анализа потоков платежей, представлены решения типовых задач финансового бизнеса. Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения студентов специальности 1-25-01-04 «Финансы и кредит».

УДК 519. 2: 336 (076)
ББК 65. 26 в 631 я 73

Содержание

Введение

Дисциплина «Финансовая математика» в качестве обязательного элемента входит в процесс подготовки финансиста, что обусловлено практическим значением финансовых вычислений. Сферы практического применения финансовой математики разнообразны: деятельность коммерческих банков, операции на фондовом рынке, страховых компаний, управление государственными финансами и финансами хозяйствующих субъектов. Профессиональное занятие бизнесом требует умения использовать различные варианты финансовых последствий при совершении сделки.

Практическое руководство «Финансовая математика: потоки платежей» предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит» и основано на учебной программе по дисциплине «Финансовая математика». Оно включает в себя теоретический и практический материал по организации финансовых расчетов, связанных с денежными потоками: кредитных операций, инвестиционных проектов, работе с ценными бумагами, а также при актуарных расчетах.

Разделы руководства имеют идентичную структуру: краткие теоретические сведения, решение типовых задач, задачи для самостоятельного решения. Издание можно использовать не только для проведения практических занятий, но и для организации самостоятельной учебной работы студентов. Практическое руководство является основой для подготовки к практическим занятиям и к сдаче зачета.

В настоящее время имеется достаточное количество обширной литературы по финансовым вычислениям. Указанная работа ни в коем случае не заменяет стандартных учебников, лишь помогает студенту самостоятельно разобраться в тех вопросах, которые вызывают у него затруднения. Успешное усвоение дисциплины дает возможность студенту приобрести определенные навыки коммерческих расчетов.

1 Финансовые ренты

1.1 Поток платежей

Проведение любой финансовой операции порождает движение денежных средств. Такое движение может характеризоваться возникновением отдельных платежей или множеством выплат и поступлений, распределенных во времени.

Потоком платежей называется ряд распределенных во времени выплат и поступлений.

Поток платежей характеризуется следующими *параметрами*:

1) величина годового платежа R_k, $k = 1, 2,\dots, N,$ – член потока;

2) период – временной интервал между двумя последовательными платежами $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2,\dots, N - 1$;

3) срок n – время от начала первого и до конца последнего периода;

4) процентная ставка i, применяемая при наращении и дисконтировании платежей;

5) число p платежей в году;

6) частота m начисления процентов.

Поскольку условия финансовых сделок весьма разнообразны, то разнообразны и виды потоков платежей. В основе классификации потоков платежей положены различные качественные признаки (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Классификация денежных потоков

Признак классификации	Виды потоков
По сроку действия	*срочные* – срок денежного потока ограничен
	бессрочные – срок денежного потока неограничен (платежи осуществляются неограниченно долго).
По моменту платежей в пределах периода	*постнумерандо* – платежи осуществляются в конце периодов
	пренумерандо – платежи осуществляются в начале периодов
По количеству платежей на протяжении года	*дискретные*: – *годовые* (платеж раз в году); – *p-срочные* (количество платежей p раз в году).
	непрерывные, когда платежи производятся слишком часто
По количеству начислений процентов на протяжении года	*дискретные*: – *годовые* (начисление раз в году); – *m-срочные* (число начислений m раз в году).
	непрерывные, когда начисления производятся часто

Поток с равными платежами, $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R$, поступающими через равные промежутки времени $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \ldots = \Delta t_n = \Delta t$, называется *финансовой рентой*. Финансовая рента постнумерандо называется *аннуитетом*. Поток платежей с платежами различных знаков, поступающими в различные моменты времени, называется *произвольным двусторонним потоком*.

Количественный анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: *наращенной суммы FV* или *современной величины PV*.

1.2 Наращенная сумма финансовой ренты

Наращенная сумма финансовой ренты – это сумма всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока. Наращенная сумма показывает, какую величину будет представлять капитал, вносимый через равные промежутки времени в течение всего срока ренты вместе с начисленными процентами.

Пусть один раз в конце года на банковский счет вносится сумма R в течение n лет. На каждый платеж один раз в конце года начисляются сложные проценты по ставке i. Для определения наращенной суммы составим таблицу 1.2.

Таблица 1.2 – Схема расчета наращенной суммы финансовой ренты

Период взноса, год	Порядковой номер взноса				
	1-й	2-й	3-й	…	n-й
1-й	R	–	–	–	–
2-й	$R\cdot(1+i)$	R	–	–	–
3-й	$R\cdot(1+i)^2$	$R\cdot(1+i)$	R	–	–
…	…	…	…	…	–
n-й	$R\cdot(1+i)^{n-1}$	$R\cdot(1+i)^{n-2}$	$R\cdot(1+i)^{n-3}$	$R(1+i)$	R

Наращенная сумма FV равна сумме элементов n-й строки и представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом R, знаменателем $1+i$ и последним членом $R(1+i)^{n-1}$:

$$FV = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \ldots + R(1+i) + R = \frac{R\left((1+i)^n - 1\right)}{(1+i)-1}.$$

Отсюда наращенная сумма годовой ренты постнумерандо равна

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Величина $s_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ называется *коэффициентом наращения ренты*, который показывает, во сколько раз наращенная сумма *FV* ренты больше члена ренты *R*.

Аналогично для p-срочной ренты с m-разовым начислением процентов в году, $m \neq p$, по сложной ставке j наращенная сумма *FV* определяется по формуле:

$$FV = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{\left(1+j/m\right)^{m/p} - 1}.$$

Величина $s_{n,j/m}^{(p)} = \dfrac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p\left(\left(1+j/m\right)^{m/p} - 1\right)}$ есть коэффициент наращения.

В частности, при $m = p$ имеем

$$FV = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим наращенную сумму p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов интенсивностью δ:

$$FV = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta / p} - 1}.$$

<u>Замечание</u>. В MS Excel наращенная сумма *FV* вычисляется с помощью функции БС (ставка; кпер; плт;пс; тип) только для случая $m = p$.

Пример 1.1. В течение 30 лет создается пенсионный фонд. На поступившие средства начисляются сложные проценты по ставке 8,5 % годовых. Сумма годовых взносов составляет 200 ден. ед. Определите величину фонда для ситуаций: а) взносы и начисление процентов 1 раз в конце года; б) взносы в конце каждого полугодия, начисление процентов в конце года; в) взносы и начисление процентов в конце каждого квартала; г) взносы и начисление процентов ежемесячно; д) взносы в конце каждого полугодия, непрерывное начисление процентов по годовой ставке 8,5 %.

<u>Решение</u>. Параметры задачи: n = 30, i = 8,5 %, R = 200 ден. ед.

а) при $p = m = 1$ имеем

$$FV_{30} = 200\,\frac{\left(1+0{,}085\right)^{30} - 1}{0{,}085} = 24\,842{,}95 \text{ ден. ед.;}$$

б) при $p = 2,\ m = 1$ имеем

$$FV_{30} = 200\,\frac{\left(1+0{,}085\right)^{30} - 1}{2\left(\sqrt{1+0{,}085} - 1\right)} = 25\,360{,}09 \text{ ден. ед.;}$$

в) при $p = m = 4$ имеем

$$FV_{30} = 200\,\frac{\left(1+0{,}085/4\right)^{120} - 1}{0{,}085} = 26\,987{,}01 \text{ ден. ед.;}$$

FV_{30} = БС(8,5%/4;30*4;-200/4) = 26 987,01 ден. ед.;

г) при $p = m = 12$ имеем

$$FV_{30} = 200\ \frac{(1+0{,}085/12)^{12\cdot 30}-1}{0{,}085} = 27\ 511{,}76 \text{ ден. ед.};$$

FV_{30} = БС(8,5%/12;30*12;-200/12) = 27 511,76 ден.ед.;

д) при $p = 2$ и $m \to \infty$ имеем:

$$FV_{30} = 200 \cdot \frac{e^{0{,}085\cdot 30}-1}{2\cdot\left(e^{0{,}085/2}-1\right)} = 27\ 195{,}25 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, различные варианты платежей и начислений процентов в году дают различные значения наращенной суммы.

1.3 Современная величина финансовой ренты

Современная величина финансовой ренты – это сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов. Данная характеристика показывает, какую сумму необходимо иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму.

Пусть в течение n лет один раз в конце года на банковский счет вносится сумма R. Каждый платеж дисконтируется на начало финансовой операции по сложной ставке i. Расчеты для определения современной величины PV представим в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Схема расчета современной величины финансовой ренты

Период взноса, год	Порядковой номер взноса				
	1-й	2-й	3-й	…	n-й
1-й	$R/(1+i)$	$R/(1+i)^2$	$R/(1+i)^3$	…	$R/(1+i)^n$
2-й	–	$R/(1+i)$	$R/(1+i)^2$	…	$R/(1+i)^{n-1}$
3-й	–	–	$R/(1+i)$	…	$R/(1+i)^{n-2}$
…	…	…	…	…	…
n-й	–	–	–	…	$R/(1+i)$

Современная величина есть сумма элементов первой строки и равна сумме геометрической прогрессии с первым членом $R/(1 + i)$, знаменателем $1/(1 + i)$ и последним членом $R/(1 + i)^n$:

$$PV = R/(1+i)^n + R/(1+i)^{n-1} + R/(1+i)^{n-2} + \ldots + R/(1+i) = \frac{\frac{R}{1+i}\left((1+i)^{-n}-1\right)}{(1+i)^{-1}-1}.$$

Отсюда современная величина финансовой ренты равна

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Величина $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ называется *коэффициентом приведения ренты*.

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году по сложной ставке j, при условии, что число выплат не равно числе начислений, т. е. $p \neq m$, современная величина равна

$$PV = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{\left(1+j/m\right)^{m/p}-1}.$$

Величина $a^{(p)}_{n,j/m} = \dfrac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left(\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right)}$ есть коэффициент приведения p-срочной ренты.

В частности, при $m = p$ имеем

$$PV = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим современную величину p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов интенсивностью δ:

$$PV = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta/p}-1}.$$

Замечание. В MS Excel современная величина аннуитета вычисляется с помощью функции ПС (ставка; кпер; плт;бс; тип) только для случая $m = p$.

Пример 1.2. Рассматриваются варианты приобретения дома стоимостью 100 000 ден. ед.: посредством единовременного платежа или ежемесячных выплат в банк в течение 15 лет по 1 000 ден. ед. Определите, какой вариант приобретения предпочтительнее, при ставке процента 8 % годовых, проценты начисляются ежемесячно.

Решение. Для ответа на вопрос необходимо сравнить, что выгоднее: заплатить сегодня всю сумму полностью или растянуть платежи на 15 лет. Для сравнения необходимо привести эти денежные потоки к одному периоду времени, т. е. рассчитать современную величину будущих фиксированных периодических выплат.

Параметры ренты: $R = 1\ 000\cdot 12 = 12\ 000$ ден. ед., $n = 15$, $m = p = 12$, $i = 8{,}5$ %. Тогда

$$PV = 12000\cdot\frac{1-\left(1+0{,}08/12\right)^{-12\cdot 15}}{0{,}08} = 104\ 640{,}59 \text{ ден. ед.},$$

PV = ПС(8 %/12;15*12;-1 000) = 104 640,59 ден. ед.

Следовательно, первый вариант выгоднее для покупателя.

Замечание. При разработке условий финансовой операции могут возникать ситуации, когда заданной величиной является одна из двух обобщающих характеристик и неполный набор параметров ренты. В таких случаях находят недостающий параметр из соответствующих уравнений. В MS Excel размер платежа финансовой ренты вычисляется с помощью функции ПЛТ(ставка; кпер; плт; [бс]; [тип]) только для случая $m = p$. Срок финансовой ренты определяется с помощью функции КПЕР(ставка, плт, пс, [сс], [тип]) только для случая $m = p$.

Пример 1.3. Для покупки автомобиля потребуется 50 000 ден. ед через 5 лет. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 40 % годовых.

Решение. В данном случае известна наращенная величина постоянной финансовой ренты, поэтому размер ежегодных взносов будет равен:

$$R = \frac{50\,000 \cdot 0{,}4}{(1+0{,}4)^5 - 1} = 4\,568 \text{ ден. ед.},$$

$$R = \text{ПЛТ}(40\%;5;\ ;-50\,000) = 4\,568 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, чтобы накопить на счете необходимую сумму для покупки автомобиля, следует в конце каждого года в течение 5 лет откладывать по 4 568 ден. ед.

Пример 1.4. Как только Вам исполнится 20 лет, Вы решили ежемесячно вносить в банк по 25 у. е. В каком возрасте Вы станете миллионером, если ставка банка 15 %, начисляемых ежемесячно по схеме сложных процентов.

Решение. Имеем $R = 25 \cdot 12 = 300$ у. е., $i = 15\%$, $PV = 1\,000\,000$ у. е. Тогда при использовании функции MS Excel получим

n = КПЕР(15 %/12;300/12; ; 1 000 000;0) = 500,430 4 месяцев.

Отсюда n = 41,7 лет или 41 год 256 дней.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

1 При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную ставку 8 % кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5 % от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10 %. Какова доходность операции для кредитора?

2 Создается целевой фонд для обеспечения инвестиций в размере 10 000 000 ден. ед. сроком на 5 лет, процентная ставка 20 %. Определите ежегодные платежи финансовой ренты: а) постнумерандо, б) пренумерандо.

3 На банковский счет один раз в конце года поступает 10 000 ден. ед. в течение 7 лет. На эти средства ежеквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15 % годовых. Определите, какая сумма будет на банковском счете к концу срока.

4 Страховая компания принимает платежи по полугодиям равными частями по 250 000 ден. ед. в течение 3-х лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты ежеквартально по ставке 10 % годовых. Определите, какую сумму получит страховая компания по истечению срока договора.

5 Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд средств. В фонд поступают платежи в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер годового платежа 4 000 000 ден. ед. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5 % годовых. Найдите величину фонда на конец срока, если: 1) проценты начисляются и платежи выплачиваются один раз в году, 2) проценты начисляются поквартально, платежи осуществляются один раз в году, 3) платежи производятся поквартально, а начисление процентов производится ежемесячно.

6 В начале первого периода фирме предложено вложить 8 000 000 ден. ед. Доходы от инвестирования ожидаются в конце четырех последующих периодов по 2 200 000 ден. ед. Определите современную величину платежей, исходя из ставки сравнения 10 % за период.

7 В течение 7 лет один раз в конце года в фонд поступают средства по 100 00 ден. ед. На них ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 15 % годовых. Определите современную стоимость фонда.

8 Ежеквартально в течение 2 лет на специальный счет поступает 100 000 ден. ед. Определите современную стоимость финансовой ренты, если проценты по ставке 12 % годовых начисляются ежемесячно.

9 Определите ежегодный платеж для создания целевого фонда для погашения задолженности в сумме 100 000 ден. ед. через 5 лет. Процентная ставка равна 20 % годовых.

10 Какой срок необходим для накопления 100 000 ден. ед. при условии, что ежемесячно вносится по 1 000 ден. ед. и на ежемесячные вложения начисляются проценты по ставке 24 % годовых.

11 Вы решили ежемесячно вносить в банк по 300 у. е. Через сколько лет Вы станете миллионером, если ставка банка 6 % годовых, проценты начисляются ежемесячно по схеме сложных процентов.

12 Долг в сумме 370 ден. ед. погашается в течение 5 лет равными платежами с годовой выплатой по 85 ден. ед. Чему будет равна эффективность займа в виде годовой ставки сложных процентов, если платежи производятся: а) в конце года; б) в конце каждого месяца?

2 Различные виды рент, конверсия и консолидация рент

2.1 Различные виды рент

Рентные платежи с простыми процентами. Пусть рентные платежи вносятся один раз в конце года, начисление простых процентов производится тоже в это время. Каждый год на первый платеж R начисляются проценты, равные $R \cdot i$, всего за n лет наращенная сумма по первому платежу равна $R \cdot (1 + (n - 1) \cdot i)$. Аналогично по второму платежу получим $R \cdot (1 + (n - 2) \cdot i)$ и т. д. В последний год вносится платеж R, и на него проценты не начисляются. Наращенная сумма FV за n лет по всем платежам есть сумма всех платежей с начисленными на них процентами:

$$FV = R \cdot (1 + (n - 1) \cdot i) + R \cdot (1 + (n - 2) \cdot i) + \ldots + R = \frac{R + R(1 + (n-1) \cdot i)}{2} n$$

или $FV = \dfrac{R\left(2 + (n-1)i\right)}{2} n$.

В p-срочной ренте с начислением процентов один раз в году платежи с начисленными на конец срока ренты процентами представляют собой последовательность:

$$\frac{R}{p}\left(1 + \frac{(N-1)}{p} i\right),\ \frac{R}{p}\left(1 + \frac{(N-2)}{p} i\right),\ \ldots,\ \frac{R}{p},$$

где $N = n \cdot p$ – общее число платежей.

Тогда наращенная сумма равна

$$FV = \frac{RN}{p}\left(1 + \frac{(N-1)i}{2p}\right) = Rn\left(1 + \frac{(np-1)i}{2p}\right).$$

Современная величина годовой ренты с использованием простых процентов рассчитывается по формулам:

а) для годовой ренты: $PV = R \sum_{t=1}^{n} \left(1 + t\, i\right)^{-1}$;

б) для p-срочной ренты: $PV = \dfrac{R}{p} \sum_{t=1}^{N} \left(1 + t\, i / p\right)^{-1}$.

Рента с периодом, превышающим год. Пусть период ренты $\tau > 1$, сложные проценты начисляются раз в конце года по ставке j годовых, платеж в конце периода равен R, срок ренты n кратен τ. Тогда наращенная сумма FV и современная величина PV равны соответственно:

$$FV = R_{\tau} \frac{s_{n;\,j}}{s_{\tau;\,j}},\ PV = R_{\tau} \frac{a_{n;\,j}}{s_{\tau;\,j}}.$$

Смешанные ренты. Срочные ренты ($p > 1$), у которых на платежи R в пределах года начисляются простые проценты по ставке j, а за годовые периоды – сложные по ставке i, называются *смешанными* рентами. Наращенная сумма $FV_{см}$ и современная величина $PV_{см}$ таких рент определяется по формулам соответственно:

$$FV_{см} = R\left(1+\frac{(p-1)j}{2p}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\left(1+\frac{(p-1)j}{2p}\right)\cdot s_{n,i},$$

$$PV_{см} = R\left(1+\frac{(p-1)j}{2p}\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\left(1+\frac{(p-1)j}{2p}\right)\cdot a_{n,i}.$$

Вечная рента. Рента, число выплат которой бесконечно, называется *вечной* рентой. Современная величина PV_∞ вечной p-срочной ренты, с m-разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j с годовым членом R равна

$$PV_\infty = \frac{R}{p\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right)}.$$

Рента пренумерандо. На практике большее распространение получил поток постнумерандо, поскольку согласно общим принципам учета принято подводить итоги и оценивать финансовый результат операции по окончании очередного отчетного периода. Рента пренумерандо отличается от обычной ренты числом периодов начисления процентов. Пусть параметры ренты есть R, i, n. Тогда рентные платежи с начисленными в конце срока процентами образуют ряд: $R(1 + i)^n$, $R(1 + i)^{n-1}$, …, $R(1 + i)$.

Наращенная сумма FV' за весь срок ренты равна

$$FV' = R\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} \text{ или } FV' = FV\cdot(1+i),$$

где FV – наращенная сумма ренты постнумерандо.

Современная величина PV' ренты пренумерандо рассчитывается аналогично, т. е. определяется современная величина ренты постнумерандо PV, которая затем умножается на $(1 + i)$:

$$PV' = PV\cdot(1+i).$$

Ренты с платежами в середине периодов. Если платежи от произведенных инвестиций распределяются более или менее равномерно на протяжении периода, используют ренты с выплатами в середине периодов. В таких ситуациях для уменьшения погрешности вычислений рекомендуется суммы поступлений за период относить к середине этого периода.

Наращенная сумма $FV_{1/2}$ и современная величина $PV_{1/2}$ p-срочной ренты с m-разовым начислением процентов в году и выплатами в середине периодов равны

$$FV_{1/2} = FV(1 + j/m)^{m/2p}, \; PV_{1/2} = PV(1 + j/m)^{m/2p},$$

где FV и PV – наращенная сумма и современная величина p-срочной ренты постнумерандо с m-разовым начислением процентов в году.

Ренты со случайными параметрами. В ряде случаев, когда один или несколько параметров ренты заранее не известны, их можно рассматривать как случайные величины с заданным или прогнозируемым законом распределения. Наращенная сумма и современная величина ренты в этом случае будут также случайными величинами. В таком случае естественно вести речь о вычислении среднего значения и дисперсии наращенной суммы или современной величины ренты. Если эти значения не удается вычислить аналитически, их можно оценить, моделируя значения соответствующих случайных величин.

2.2 Конверсия рент

Изменение хотя бы одного условия ренты по существу означает замену одной ренты другой, которая базируется на принципе финансовой эквивалентности, что означает равенство современных стоимостей обеих рент. При этом процентная ставка может быть сохранена или изменена.

Пусть имеется рента постнумерандо с платежом R_0, сроком n_0, процентной ставкой i. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. Для исходной ренты современная величина PV_0 и наращенная сумма FV_0 находятся по формулам соответственно:

$$PV_0 = R_0 \cdot a_{n_0,i}, \; FV_0 = R_0 \cdot s_{n_0,i},$$

где $a_{n_0,i}$ и $s_{n_0,i}$ – коэффициенты приведения и наращения ренты.

Из условия финансовой эквивалентности современная величина PV_1 новой ренты должна совпадать с современной величиной PV_0 исходной ренты, т. е. $PV_1 = PV_0$. При сохранении сроков ренты, $n_1 = n_0 = n$, имеем $R_1 \cdot a_{n,i} \cdot (1 + i)^{-t} = R_0 \cdot a_{n,i}$. Величина $(1 + i)^{-t}$ есть дисконтный множитель за период t, на который отложена рента. Отсюда платеж R_1 ренты, отложенной на t лет, равен $R_1 = R_0(1 + i)^{-t}$. Платеж ренты, отложенной на t лет, при m-разовом начислении процентов в году равен

$$R_1 = R_0(1 + i/m)^{-m\,t}.$$

Величина рентного платежа R_1 новой ренты, отсроченной на t лет и с новым сроком $n_0 \neq n_1$, определяется по формуле

$$R_1 = R_0 \frac{a_{n_0,i}}{a_{n_1,i}} (1 + i)^t,$$

где $a_{n_0,i}$, $a_{n_1,i}$ – коэффициенты приведения старой и новой рент.

Срок n_1 новой ренты, отсроченной на t лет с неизменной величиной рентного платежа $R_0 = R_1$, определяется по формуле

$$n_1 = \frac{-\ln(1-(1-(1+i)^{-n_0})\cdot(1+i)^t)}{\ln(1+i)}.$$

Если n_1 не целое число, то для обеспечения эквивалентности финансовых результатов разницу погашают в начале первого периода.

Величина рентного платежа R_1 ренты с новым сроком $n_1 \neq n_0$ равна

$$R_1 = R_0 \frac{1-(1+i)^{-n_0}}{1-(1+i)^{-n_1}}.$$

Величина рентного платежа R_1 новой ренты с изменением срочности ренты (числа выплат в году) определяется по формуле

$$R_1 = R_0 \frac{a_{n,i}^{(p_0)}}{a_{n,i}^{(p_1)}} = R_0 \frac{p_1 \cdot ((1+i)^{1/p_1} - 1)}{p_0 \cdot ((1+i)^{1/p_0} - 1)}.$$

В частности, при замене годовой ренты ($p_0 = 1$) на p- срочную, рентный платеж R_1 определяется по формуле

$$R_1 = R_0 \frac{p_1((1+i)^{1/p_1} - 1)}{i}.$$

В общем случае при замене нескольких параметров ренты, платеж заменяющей ренты равен

$$R_1 = PV_0 \left(\frac{1-(1+i_1/m_1)^{-m_1 \cdot n_1}}{p_1 \cdot ((1+i_1/m_1)^{m_1/p_1} - 1)} \right)^{-1}.$$

Пример 2.1. Годовую ренту пренумерандо со сроком 5 лет, разовым платежом 2 000 ден. ед. и ставкой 6 % необходимо заменить рентой сроком 8 лет. Определите платеж заменяющей ренты.

__Решение__. Параметры ренты: $R_0 = 2\ 000$ ден. ед., $n_0 = 5$ лет, $n_1 = 8$ лет, $i = 6$ %. Определим современную стоимость такой ренты пренумерандо:

$$PV' = 2\ 000 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06) = 8\ 930{,}21 \text{ ден. ед.}$$

Годовой платеж восьмилетней ренты с такой же современной стоимостью найдем из уравнения эквивалентности:

$$R_1 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-8}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06) = 8\ 930{,}21.$$

Отсюда получим

$$R_1 = 1\ 356{,}\ 68 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, годовой платеж восьмилетней ренты новой ренты равен 1 356, 68 ден. ед.

2.3 Консолидация рент

Консолидация рент – это объединение нескольких рент в одну, основанное на принципе финансовой эквивалентности. Современная величина вновь образованной консолидированной ренты PV должна быть равна сумме современных величин заменяемых (объединяемых) рент PV_q, $q=1,\ldots,K$

$$PV = \sum_{q=1}^{K} PV_q \,.$$

Правило объединения рент:

1) находятся и суммируются современные величины рент-слагаемых;

2) полученная сумма приравнивается к современной стоимости заменяющей ренты;

3) задав все параметры заменяющей ренты, кроме одного, из уравнения эквивалентности определяется недостающий параметр.

Пример 2.2. Определите годовой платеж новой шестилетней ренты, заменяющей две: одна длительностью 5 лет с годовым платежом 1 000 $, другая длительностью 8 лет с годовым платежом 800 $. Годовая ставка процента равна 8 %.

Решение. Параметры задачи: R_1 = 1 000 $, R_2 = 800 $, n_1 = 5 лет, n_2 = 8 лет, n = 6 лет.

Современные величины рент равны

$$PV_1 = 1\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08} = 3\,992{,}7\ \$,$$

$$PV_2 = 800 \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08} = 4\,597{,}28\ \$.$$

Определим современную величину замещающей ренты:

$$PV = PV_1 + PV_2 = 3\,992{,}7 + 4\,597{,}28 = 8\,589{,}98\ \$.$$

Годовой платеж R заменяющей шестилетней ренты найдем из уравнения эквивалентности:

$$R \cdot \frac{1-(1+i)^{-6}}{0{,}08} = 8\,589{,}98.$$

Отсюда R = 1 858, 14 $.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1 Рентные платежи вносятся дважды в год по 500 ден. ед. в течение 4-х лет. Начисление простых процентов производится в конце года по ставке 20 % годовых. Определите наращенную сумму ренты.

2 Банк, предоставляя фирме кредит сроком на 4 года, выставил следующие условия: кредит должен быть погашен ежегодными равными платежами по 160 000 ден. ед., вносимыми в конце года. На платеж начисляются простые проценты в размере 15 % годовых. Определите современную величину ренты.

3 Фонд создается в течение 6 лет. На собранные средства начисляется 9,2 % годовых. Годовые платежи в сумме 36 000 ден. ед. поступают в конце каждого квартала. Первые 4 года использовалась смешанная форма начисления процентов, затем она была отменена. Чему равна наращенная сумма фонда в конце шестого года?

4 Участок сельскохозяйственных угодий может приносить ежегодный доход в 200 000 ден. ед. в конце каждого года, если на удобрения в начале года, тратить по 200 ден. ед. В какую сумму следует оценить этот участок при нормативе доходности в 12 % годовых?

5 Определите цену вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 2 000 ден. ед. при номинальной процентной ставке 12 % годовых и ежеквартальном начислении процентов.

6 Пусть рента постнумерандо с условиями R_0 = 2 000 000 ден. ед. и сроком n_0 = 6 лет откладывается на t = 2 года. Определите рентный платеж отложенной ренты для случаев: а) без изменения срока самой ренты; б) срок ренты увеличивается, n_1 = 8 лет. Определите новый срок ренты, если она откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Ставка, принятая для пролонгирования, 5 % годовых.

7 Годовую ренту пренумерандо со сроком 6 лет, разовым платежом 3 000 ден. ед. и ставкой 8 % необходимо заменить рентой сроком на 9 лет. Определите параметры ренты.

8 Найдите ренту-сумму для двух годовых рент постнумерандо: одна длительностью 6 лет с годовым платежом 2 000 $, а другая – 9 лет с годовым платежом 1 800 $. Годовая ставка равна 10 %. Определите годовой платеж заменяющей ренты сроком 5 лет.

3 Кредитные расчеты

Расходами по обслуживанию долга или *амортизацией* кредита называются расходы, связанные с погашением основного долга и выплатой процентов по нему. *Срочной уплатой* Y называется сумма годового расхода R по погашению основного долга (тело кредита) и процентного платежа I по кредиту:

$$Y = R + I\,.$$

Существуют различные способы погашения задолженности. Участники кредитной сделки оговаривают их при заключении контракта.

3.1 Потребительский кредит

Потребительный кредит предоставляется для покупки предметов личного потребления. Для расчетов по начислению процентов на сумму долга D используется простая процентная ставка i. Наращенная сумма долга за n лет равна $FV = D(1 + n\,i)$. Сумма срочной уплаты Y, если платежи по кредиту осуществляются p раз в году, определяется по формуле

$$Y = \frac{FV}{pn} = \frac{D}{np} + \frac{iD}{p}.$$

Здесь тело кредита $R = D/pn$ и процентный платеж $I = iD/p$ одинаковы для всех периодов погашения кредита.

«Правило 78». Расчленение величины срочной уплаты на не постоянные процентные платежи I в мировой практике называется «*правилом 78*». Такое название вызвано тем, что сумма порядковых номеров месяцев года равна 78 (1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78). В соответствии с «правилом 78» уплата процентов при первом платеже составит 12/78 общей начисленной суммы процентов. При втором платеже на оплату процентов пойдет 11/78 общей начисленной суммы процентов и т. д.

При выдаче ссуды на n лет из условия p погасительных платежей в году последовательные номера платежей за весь срок погашения могут быть записаны в обратном порядке следующим образом:

$$t_1 = np,\ t_2 = np - 1,\ \ldots,\ t_{np} = 1.$$

Сумма порядковых номеров платежей с учетом суммы арифметической прогрессии равна

$$Q = t_1 + t_2 + \ldots + t_{np} = np + (np - 1) + \ldots + 1 = np(1 + np)/2.$$

Пусть $I = Dni$ – сумма начисленных процентов за весь срок кредита. Величина процентного платежа I_t в каждом периоде t равна

$$I_t = I(np - t + 1)/Q,\ t = 1, 2, \ldots, np.$$

Сумма погашенного долга W_k на конец периода k равна

$$W_k = D_k - \sum_{t=1}^{k} \frac{t}{Q} Dni,$$

где D_k – остаток непогашенного долга на момент k, $D_k = D - W_{k-1}$.

Пример 3.1. Потребительский кредит в размере 40 000 ден. ед. выдан сроком на 2 года с ежемесячным погашением равными выплатами. Ставка по кредиту составляет 24 % годовых. Составить план погашения задолженности согласно «правилу 78».

Решение. Параметры кредита: D = 40 000 ден. ед., i = 24 %, n = 2 года, p = 12. Сумма, подлежащая возврату, равна

$$FV = PV(1+ni) = 40\,000 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}24) = 59\,200 \text{ ден. ед.}$$

Сумма начисленных процентов равна $I = Dni$ = 19 200 ден. ед.

Величина срочной уплаты равна

$$Y = FV/pn = 59\,200/(12 \cdot 2) = 2\,467 \text{ ден. ед.}$$

Сумма порядковых номеров месяцев равна $Q = 1 + 2 + \ldots + 24 = 300$.

Из первого платежа в счет уплаты процентов от общей суммы начисленных процентов идет 24/300, т. е.

$$I_1 = 24/300 \cdot 19\,200 = 1\,536 \text{ ден. ед.}$$

Сумма, идущая на погашение основного долга в этом месяце, равна

$$R_1 = Y - I_1 = 2\,467 - 1\,536 = 931 \text{ ден. ед.}$$

Тогда остаток основного долга на начало второго месяца равен

$$D_2 = 40\,000 - 931 = 39\,069 \text{ ден. ед.}$$

Во втором месяце сумма, идущая на погашение процентов, составит

$$I_2 = 23/300 \cdot 19\,200 = 1\,472 \text{ ден. ед. и т. д.}$$

В таблице 3.1 показаны расчеты, представляющие основу плана погашения долга.

Таблица 3.1 – План погашения кредита по «правилу 78»

Платеж	$q_t = \dfrac{np - (t-1)}{Q}$	Остаток долга $D_t = D_{t-1} - R_t$	Срочная уплата $Y_t = FV/np$	Проценты $I_t = I\,q_t$	Платеж по основному долгу $R_t = Y - I_t$
1	24/300	40 000	2 467	1 536	931
2	23/300	39 069	2 467	1 472	995
3	22/300	38 075	2 467	1 408	1 059
4	21/300	37 016	2 467	1 344	1 123
5	20/300	35 893	2 467	1 280	1 187
6	19/300	34 707	2 467	1 216	1 251
7	18/300	33 456	2 467	1 152	1 315
8	17/300	32 141	2 467	1 088	1 379
9	16/300	30 763	2 467	1 024	1 443
10	15/300	29 320	2 467	960	1 507
11	14/300	27 813	2 467	896	1 571
12	13/300	26 243	2 467	832	1 635
13	12/300	24 608	2 467	768	1 699
14	11/300	22 909	2 467	704	1 763
15	10/300	21 147	2 467	640	1 827
16	9/300	19 320	2 467	576	1 891
17	8/300	17 429	2 467	512	1 955
18	7/300	15 475	2 467	448	2 019
19	6/300	13 456	2 467	384	2 083
20	5/300	11 373	2 467	320	2 147
21	4/300	9 227	2 467	256	2 211
22	3/300	7 016	2 467	192	2 275
23	2/300	4 741	2 467	128	2 339
24	1/300	2 403	2 467	64	2 403
Итого		*0*	*59 200*	*19 200*	*40 000*

Правило «от 100». Согласно правилу «от 100» долг в каждом периоде выплачивается равными долями. Процентный платеж за пользование потребительским кредитом начисляется предварительно: для первого периода процентный платеж рассчитывается на всю величину долга, а в каждый следующий период – на оставшуюся часть долга, т. е. на величину долга, уменьшенную на уже выплаченную часть.

3.2 Долгосрочные и среднесрочные кредиты

Для долгосрочных и среднесрочных кредитов проценты начисляются по сложной процентной ставке. Погашение кредита предусматривает несколько вариантов, в зависимости от которых кредитополучатель выплачивает различные суммы по кредиту.

Сумма равных срочных уплат равна наращенной сумме по долгу. Простейшим случаем погашения долга D равными срочными уплатами является кредит, при котором проценты начисляются сразу на всю сумму долга по сложной ставке i. Сумма долга с процентами, т. е. $FV = D(1+i)^n$, на протяжении всего срока n погашается равными срочными уплатами Y с количеством платежей в году, равным p. Размер срочной уплаты определяется по формуле $Y = FV/np$.

Сумма равных срочных уплат равна сумме долга. Размер срочной уплаты Y на конец текущего года t, $t = 1, 2, \ldots, n$, можно представить как сумму процентов и сумму погашения долга $Y = R_t + I_t$, где R_t – величина погашения основной суммы долга; I_t – процентный платеж по кредиту.

Величина долга D равна сумме всех дисконтированных платежей, т. е. является современной величиной всех срочных уплат:

$$D = \frac{Y}{1+i} + \frac{Y}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Y}{(1+i)^n} = \frac{Y}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}.$$

Преобразуя, получим:

$$D = Y \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ или } D = Y \cdot a_{n,i},$$

где $a_{n,i}$ – коэффициент приведения финансовой ренты.

Отсюда величина срочной уплаты равна $Y = 1/a_{n,i}$. Величина $k = 1/a_{n,i}$ называется *коэффициентом погашения задолженности*.

Сумма погашенной задолженности W_t на конец года t равна $W_t = R_1 \cdot s_{t,i}$, где $s_{t,i}$ – коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо. Остаток долга на момент времени t равен $D_t = D - W_{t-1}$.

Если задана величина Y срочной уплаты, то срок его погашения определяется по формуле $n = -\ln(1 - Di/Y)/\ln(1+i)$. Видно, что погасить задолженность можно лишь для $Y > Di$.

Поскольку расчетное значение n обычно оказывается дробным числом, то его округляют до ближайшего большего целого числа n_1. В годах 1, 2, …, (n_1–1) срочные уплаты равны Y, а в году n_1 срочная уплата определяется из условия полного погашения долга.

В общем случае, когда платежи осуществляются p раз в году и начисление процентов m раз в году, то коэффициент погашения задолженности равен

$$k = \frac{1}{a_{n,\,j/m}^{(p)}},\ a_{n,\frac{j}{m}}^{(p)} = \frac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{p\left(\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right)},$$

и величина годовой срочной уплаты – $Y = \dfrac{D}{a_{n,\,j/m}^{(p)}}$, а разовой – $Y_p = \dfrac{D}{p \cdot a_{n,\,j/m}^{(p)}}$.

Погашение основного долга равными выплатами. Пусть основной долг погашается равными ежегодными выплатами, а проценты начисляются на остаток долга. Размеры платежей по основному долгу равны

$$R_1 = \ldots = R_n = D/n = R.$$

Остаток основного долга в начале каждого расчетного периода t определяется как $D_t = D - R(t-1)$, где D – сумма всего долга, t – номер расчетного периода, $t = 1, 2, \ldots, n$. Величина срочной уплаты в каждом расчетном периоде t равна $Y_t = R + D_t \cdot i$ или $Y_t = \left(D - R(t-1)\right)\cdot i + R$.

Замечание. Рассмотренные схемы погашения кредита чаще всего используются при планировании погашения ипотечной ссуды. Сущность ипотечного кредита заключается в том, что владелец недвижимого имущества (земли, домов и т. п.) получает кредит под залог этого имущества. В случае невозврата долга в установленный срок заложенное имущество становится собственностью кредитора. Размер ссуды, как правило, не превышает 70–75 % от стоимости заложенного имущества.

3.3 Льготные кредиты

Условная потеря кредитора, вызванная предоставлением кредита на льготных условиях, называется *грант-элементом.* Грант-элемент может быть выражен в виде абсолютной W или относительной w величины.

Абсолютный грант-элемент определяется как разность между номинальной суммой кредита D и современной величиной платежей G по погашению кредита, рассчитанных по рыночной ставке: $W = D - G$. *Отно-*

сительный гранд-элемент есть отношение абсолютного гранд-элемента к сумме кредита: $w = W/D$, и характеризует условные потери кредитора.

Льготный кредит по более низкой процентной ставке, чем на рынке капиталов, с погашением равными срочными уплатами. Пусть D – сумма предоставленного кредита; n – срок кредита; g – льготная процентная ставка, по которой предоставлен кредит; i – общепринятая процентная ставка на рынке капиталов ($i > g$); Y, Y' – срочные уплаты при использовании общепринятой процентной ставки и льготной ставки соответственно; W – величина абсолютного грант-элемента.

Величина платежа по льготной ставке есть $Y' = D/a_{n,g}$. Современная величина платежей Y' по ставке i рассчитывается как современная величина ренты постнумерандо: $G = Y' \cdot a_{n,i}$. Тогда абсолютный грант-элемент

$$W = D - G = D - Y' \cdot a_{n,i} = D - \frac{D}{a_{n,g}} \cdot a_{n,i} = D\left(1 - \frac{a_{n,i}}{a_{n,g}}\right),$$

а относительный грант-элемент $w = 1 - a_{n,i} / a_{n,g}$.

Предоставление льготного периода. Предоставление льготного периода увеличивает выгодность кредита для кредитополучателя.

1 В льготном периоде L кредитополучатель выплачивает проценты, а в оставшееся время n – L срочные уплаты по кредиту. Современная величина поступлений по кредиту есть сумма современной величины процентных платежей в льготном периоде L и современной величины срочных уплат в оставшееся время $n - L$:

$$G = Dga_{L,i} + Y' a_{n-L;i} V^L,$$

где $a_{n-L,i}$, $a_{n-L,g}$ – коэффициенты дисконтирования рент постнумерандо со сроками $n - L$ и процентными ставками i и g;

$V = 1/(1 + i)$ – дисконтный множитель по ставке i;

$Y' = D/\, a_{n-L,g}$ – срочная уплата.

Тогда абсолютный грант-элемент будет равен

$$W = D - G = D - Dga_{L,i} + Y' \cdot a_{n-L;i} V^L,$$

а относительный грант-элемент: $w = 1 - \left(ga_{L,i} + \dfrac{a_{n-L,i}}{a_{n-L,g}} V^L \right).$

***2** Начисленные в льготном периоде L проценты присоединяются к основному долгу, который погашается в течение n – L лет.* Срочные уплаты здесь равны $Y' = D(1 + g)^L/\, a_{n-L,g}$, современная величина срочных уплат есть $G = Y\, a_{n-L,i}$. Тогда абсолютный грант-элемент будет равен

$$W = D - Ya_{n-L;i} V^L = D - \frac{D(1+g)^L}{a_{n-L;g}} a_{n-L;i} V^L \text{ или } W = D\left(1 - \frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \cdot \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^L\right),$$

а относительный грант-элемент: $w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^{L}$.

3.4 Формирование погасительного фонда

Погашение основной суммы кредита единовременным платежом в конце срока предусматривает варианты, когда проценты присоединяются к сумме долга или когда выплачиваются периодически. При значительной сумме долга и длительном его сроке разовое погашение затруднительно. Поэтому создается так называемый фонд погашения, который, аккумулирует денежные средства, направленные на погашение задолженности. Наиболее эффективно размещение фонда погашения с начислением на взносы процентов, например, на специальном счете в банке.

Пусть D – первоначальная сумма долга; i – ставка процентов по условиям кредита; q – ставка процентов при создании фонда погашения, $s_{n,q}$ – коэффициент наращения финансовой ренты; n – срок долга в годах.

Если проценты выплачиваются по мере их начисления, основная сумма кредита возвращается в конце срока, то срочная уплата равна

$$Y = R + I = D/s_{n,i} + i \cdot D.$$

Если погашение долга единовременным платежом состоит в выплате процентов одновременно с погашением долга, то срочная уплата равна

$$Y = D(1+i)^n/s_{n,q}.$$

Очевидно, что создание погасительного фонда выгоднее должнику при $q > i$, так как в этом случае он будет получать более высокие проценты, чем выплачивает сам.

Замечание. При составлении плана погашения кредита все расчеты удобно представлять в виде таблицы 3.1.

3.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Холодильник ценой 6 000 000 ден. ед. продается в кредит на 2 года под 20 % годовых. Погасительные платежи вносятся ежемесячно. Определите размер разового платежа и составить план погашения задолженности. Рассмотрите два случая: а) «правило 78»; б) правило «от 100».

2 Кредит величиной 5 000 $ выдан на 5 лет под сложные проценты 10 % годовых. Составьте план погашения задолженности с условием, что основной долг гасится равными выплатами.

3 Заем 5 000 $ выдан на 5 лет под сложные проценты 10 % годовых. Определите величину годового платежа, если долг должен быть погашен равными ежемесячными выплатами. Составьте план погашения долга.

4 Льготный кредит в 9 000 $ взят под 4 % годовых на 10 лет. Заемщик имеет возможность поместить валютные средства под 8 % годовых. Он намерен образовать погасительный фонд, перечисляя определенную сумму денег в конце каждого года. Определите размер ежегодного платежа в погасительный фонд. Составьте план погашения задолженности.

5 Согласно кредитному соглашению, необходимо оплатить кредит в размере 1 000 000 ден. ед. и начисленные на него проценты (5 % сложных годовых) равными платежами в конце каждого года. Сумма ежегодного платежа равна 100 000 ден. ед. Определите срок такого кредитного соглашения, а также составьте план погашения кредита.

4 Анализ инвестиционных проектов

4.1 Показатели эффективности инвестиционных проектов

Инвестиции определяются как вложение денежных средств (или иных ценностей, имеющих денежную оценку) для получения доходов в будущем. По объекту вложений различают реальные и финансовые инвестиции. *Реальные инвестиции* – это вложение денежных средств в материальные ресурсы: землю, недвижимость, оборудование. Производственные инвестиции есть один из видов реальных инвестиций в создание, реконструкцию или перепрофилирование производственного предприятия. *Финансовые инвестиции* – это вложение денежных средств в финансовые инструменты, т. е. ценные бумаги любого вида. Ценная бумага представляет собой документ, закрепляющий за ее держателем право на получение при определенных условиях доходов в будущем.

Для привлечения производственных инвестиций разрабатывается инвестиционный проект. Основная характеристика инвестиционного проекта – поток расходов $b_1, b_2 ,\ldots, b_n$ и поток доходов $a_0, a_1, a_2 ,\ldots, a_n$ в моменты времени $t = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2,\ldots, t_n = n$ (годы). Инвестиционный проект описывается финансовым потоком вида $(R_0, R_1, R_2,\ldots, R_n)$, $R_k = a_k - b_k$. Проект классического характера – это проект, в котором денежный поток меняет знак только один раз (расходы инвестора предшествуют доходам от проекта). Для оценки эффективности инвестиционного проекта используются показатели, основанные на дисконтировании членов потока к начальному моменту потока по ставке i. Считается, что i – годовая процентная ставка, по которой инвестор мог бы дать взаймы или занять деньги.

4.2 Чистая современная стоимость проекта и чистая будущая стоимость проекта

Чистая современная стоимость $NPV(i)$ проекта при процентной ставке i есть современная стоимость чистого денежного потока проекта по процентной ставке i:

$$NPV(i) = \sum_{t=0}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t},\ R_t = a_t - b_t,\ \text{или}\ NPV(i) = \sum_{t=0}^{n} a_t(1+i)^{-t} - \sum_{t=0}^{n} b_t(1+i)^{-t}.$$

Свойства и экономическое содержание $NPV(i)$:

1) если $NPV(i) > 0$, то доходы от проекта окупают вложенные инвестиции. При $NPV(i) < 0$ доходы не окупают инвестиций. При $NPV(i) = 0$ проект ни прибыльный, ни убыточный, но, скорее всего, будет принят;

2) чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ характеризует возможный прирост (убытки) капитала инвестора в результате реализации проекта по сравнению с альтернативными вложениями под ставку i;

3) если $NPV(i) > 0$, то $NPV(i)$ – это максимальная величина, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным.

Показатель $NPV(i)$ является абсолютным, учитывает масштабы инвестиций и позволяет рассчитать прирост (убыток) капитала инвестора по сравнению с альтернативным вложением инвестиций.

Замечание. В MS Excel чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ вычисляется с помощью функции ЧПС (ставка; значения).

Чистой будущей стоимостью проекта называется величина $NFV(i)$:

$$NFV(i) = NPV(i)(1+i)^n \text{ или}$$

$$NPV(i) = \sum_{t=0}^{n} a_t(1+i)^{n-t} - \sum_{t=0}^{n} b_t(1+i)^{n-t}.$$

Свойства и экономическое содержание $NFV(i)$:

1) пусть проект осуществляется за счет собственных средств инвестора, i – годовая банковская процентная ставка по срочному вкладу на n лет. Первое слагаемое можно рассматривать как результат реинвестирования к моменту n доходов от проекта, второе – потери инвестора при реализации инвестиционного проекта вследствие того, что он не разместил свои деньги на банковский счет, а вложил их в проект;

2) если $NFV(i) > 0$, то инвестору выгоднее финансировать проект, а не вкладывать деньги в банк под ставку i. При этом величина $NFV(i)$ показывает, насколько выгоднее. Если $NFV(i) < 0$, то $NFV(i)$ – размер убытков инвестора в случае реализации проекта. При $NFV(i) = 0$ инвестор предпо-

чтет тот способ вложения денег (в проект или на банковский счет), который является более надежным.

4.3 Внутренняя норма доходности проекта

Внутренняя норма доходности IRR проекта – это ставка дисконтирования r, при которой чистая современная стоимость проекта равна нулю:

$$NPV(r) = 0 \text{ или } \sum_{t=0}^{n} R_t (1+r)^{-t} = 0.$$

Решение r, если оно существует, называется *доходностью проекта*. Показано, что при $\sum_{t=0}^{n} R_t > 0$ уравнение имеет единственное положительное решение $r = IRR$.

Свойства и экономическое содержание IRR:

1) при $i = IRR$ инвестиционные вложения в точности окупаются доходами, но не приносят прибыль:

$$\sum_{t=0}^{n} a_t (1+r)^{-t} = \sum_{t=0}^{n} b_t (1+r)^{-t};$$

2) если ставка дисконтирования $i < IRR$, то проект является прибыльным; если $i > IRR$, то проект является убыточным. Ставка $i = IRR$ – это максимальная ставка дисконтирования, при которой проект не является убыточным;

3) чем больше разность ($IRR - i$), тем больше резерв безопасности проекта. Разность ($IRR - i$) определяет предельную возможность увеличения инвестиций в проект, позволяющую избежать убытков при данных доходах и ставке дисконтирования i;

4) IRR – это относительный показатель, характеризующий среднегодовой темп увеличения капитала инвестора. Чем выше IRR, тем больше эффективность инвестиций.

Критерий IRR неявно предполагает реинвестирование получаемых доходов по ставке IRR. Если финансирование проекта осуществляется за счет банковской ссуды под i годовых, то получаемые в процессе его реализации доходы должны быть реинвестированы по ставке IRR. Среднегодовая доходность проекта совпадает с его IRR, если доходы от проекта реинвестируются под ставку $r = IRR$ до окончания проекта. Практически же эти доходы можно инвестировать под ставку дисконтирования i.

Модифицированной внутренней нормой доходности MIRR называется величина

$$MIRR = \sqrt[n]{P(n)/P(0)} - 1,$$

где $P(0) = \sum_{t=0}^{n} b_t (1+i)^{-t}$ – современная стоимость инвестиций в проект;

$P(n) = \sum_{t=0}^{n} a_t (1+i)^{n-t}$ – результат реинвестирования доходов по ставке i к моменту n окончания проекта (будущая стоимость доходов).

Величина MIRR показывает, при какой процентной ставке банковского депозита вложение первоначального капитала в банк привело в конце финансовой операции к точно такому же эффекту, который ожидается от вложения капитала в проект и размещения образующихся свободных денежных средств на банковский депозит. Проект принимается, если ставка дисконтирования проекта $i < MIRR$.

Замечание. В MS Excel внутренняя норма доходности IRR и модифицированная внутренняя норма доходности $MIRR$ вычисляются с помощью функций ВСД (значения; предположение) и МВСД (значения; ставка_финанс; ставка_реинвест) соответственно.

4.4 Срок окупаемости проекта

Простой срок окупаемости PP – это продолжительность времени, в течение которого недисконтированные прогнозируемые поступления денежных средств превысят недисконтированную сумму инвестиций, т. е. это число лет, необходимых для возмещения стартовых инвестиционных расходов. В этом случае равные суммы дохода, получаемые в разное время, рассматриваются как равноценные. Если I – размер инвестиций, R – ежегодный чистый доход, то простой срок окупаемости равен $PP = I/R$.

Срок окупаемости проекта DPP – это срок действия проекта $n^* \le n$, за который современная стоимость потока доходов становится равной современной стоимости потока инвестиций в проект:

$$\sum_{t=0}^{n^*} a_t (1+i)^{-t} = \sum_{t=0}^{n^*} b_t (1+i)^{-t} .$$

Так как не всегда существует целое n^*, при котором выполняется равенство, то приближенное значение срока окупаемости определяют следующим образом: n^* – наименьшее целое, не превышающее срок проекта n лет, такое, что

$$\sum_{t=0}^{n^*} a_t (1+i)^{-t} \ge \sum_{t=0}^{n^*} b_t (1+i)^{-t} .$$

При сроке действия проекта $(n^* - 1)$ лет современная стоимость потока доходов меньше современной стоимости потока расходов:

$$\sum_{t=0}^{n^*} a_t (1+i)^{-t} < \sum_{t=0}^{n^*} b_t (1+i)^{-t} .$$

Знак равенства соответствует точному (как правило, не целому) значению срока окупаемости, удовлетворяющему определению.

Свойства и экономическое содержание *DPP*:

1) срок окупаемости n^* – это время, необходимое для полной компенсации инвестиций в проект доходами от проекта;

2) если $i = IRR$, то $n^* = n$;

3) n^* – это срок действия проекта, $n^* \le n$, за который его чистая современная стоимость $NPV(i)$ становится неотрицательной;

4) проект классического характера имеет срок окупаемости n^* тогда и только тогда, когда его показатель $NPV(i) \ge 0$. Если $NPV(i) < 0$, то проект не имеет срока окупаемости;

5) проект классического характера имеет срок окупаемости n^* тогда и только тогда, когда его ставка дисконтирования $i \le IRR$. Если ставка дисконтирования проекта $i > IRR$, проект не имеет срока окупаемости.

Недостатком показателя *DPP* является то, что этот показатель не учитывает доходов за весь срок проекта. Следствием этого недостатка может быть неверная оценка проекта. Поэтому показатель срока окупаемости не должен служить критерием выбора, а может только использоваться лишь в виде ограничения при принятии решения.

4.5 Индекс доходности

Индекс доходности PI проекта – это число, равное отношению современных стоимостей доходов и инвестиций в проект:

$$PI = \sum_{t=0}^{n^*} a_t (1+i)^{-t} \Big/ \sum_{t=0}^{n^*} b_t (1+i)^{-t} .$$

Свойства и экономическое содержание *PI*:

1) показатель *PI* характеризует уровень доходов на единицу затрат: $PI > 1$ – доходы окупают вложенные инвестиции; $PI < 1$ – инвестиции в проект не окупаются; $PI = 1$ – проект ни прибыльный, ни убыточный;

2) если $i = IRR$, то $PI = 1$;

3) если $n = n^*$, то $PI = 1$;

4) чем больше показатель *PI* превосходит единицу, тем больше резерв безопасности проекта.

Показатель *PI* является относительным. Если требуется сделать выбор из нескольких проектов по этому показателю, то выбирается проект с наибольшим индексом доходности среди всех проектов, для которых этот показатель больше либо равен единице.

Пример 4.1. Рассматривается проект (– 1000, – 300, 500, 500, 500, 500) при ставке дисконтирования 5 % годовых на 5 лет. Оценить эффективность проекта.

<u>*Решение*</u>. Определим чистую современную стоимость

$$NPV(5\ \%) = -1000 - \frac{300}{1+0{,}05} + \frac{500}{(1+0{,}05)^2} + \frac{500}{(1+0{,}05)^3} + \frac{500}{(1+0{,}05)^4} + \frac{500}{(1+0{,}05)^5} =$$

$= 403$ ден. ед.

или в MS Excel с помощью функции ЧПС

NPV(5 %) = – 1000 + ЧПС(5 %;-300, 500; 500;500;500) = 403 ден. ед.

Чистая наращенная стоимость равна

$$NFV(5\ \%) = NPV(i)(1 + 0{,}05)^5 = 514 \text{ ден. ед.}$$

Если доходы реинвестировать под ставку 5 % на депозит, то на банковском счете инвестора будет накоплена сумма

$$FV_1 = 500 \cdot \frac{1+(1+0{,}05)^4}{0{,}05} = 2\ 155 \text{ ден. ед.}$$

Если не инвестировать проект, а сразу разместить деньги на депозит, то

$$FV_2 = 1000\ (1 + 0{,}05)^5 + 300(1 + 0{,}05)^4 = 1\ 641 \text{ ден. ед.}$$

Разность $FV_1 - FV_2 = 2\ 155 - 1\ 641 = 514$ ден. ед. составляет величину $NFV(i)$. По окончании проекта прибыль инвестора по сравнению с размещением денег на депозит составит 514 ден. ед.

Значение показателя IRR определяется как решение уравнения

$$-1000 - \frac{300}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} + \frac{500}{(1+r)^5} = 0.$$

С помощью функции ВСД в MS Excel получаем

$$IRR = r \approx 0{,}14425\ (\approx 14{,}43\ \% \text{ годовых}).$$

Так как $r > i$, то проект является выгодным, что подтверждает оценку этого проекта по показателю $NPV(i)$.

Резерв прочности проекта 14,43 % – 5 % = 9,43 %. Следовательно, ставка дисконтирования может быть еще увеличена на 9,43 %, при этом проект останется выгодным. Однако уже при ставке 15 % проект убыточный, т. е.

$$NPV(15\ \%) = -1000 - \frac{300}{1+0{,}15} + \frac{500}{(1+0{,}15)^2} + \frac{500}{(1+0{,}15)^3} + \frac{500}{(1+0{,}15)^4} +$$

$$+ \frac{500}{(1+0{,}15)^5} = -\ 564 \text{ ден. ед.}$$

Модифицированная норма доходности равна

$$MIRR = \sqrt[5]{\frac{2\,155}{1\,000 + 300/(1+0{,}05)}} - 1 = 0{,}108\ 8 \text{ или } 10{,}88\ \%.$$

Так как MIRR > 5 %, значит проект выгодный.

Простой срок окупаемости PP не учитывает фактор времени. Поэтому равные суммы дохода, получаемые в разное время, рассматриваются как равноценные. Тогда PP = 1300/500 = 2,6 или 2 года и 219 дней.

Расчет динамического срока окупаемости IPP представлен в таблице 4.1. Нижняя строка таблицы – чистая современная стоимость проекта для сроков его действия от 0 до 5 лет. Период отдачи – 4 года, начиная со 2-го года. Сроки действия проекта от 2 до 5 лет содержат период отдачи. Чистая современная стоимость проекта возрастает, начиная с 2 летнего срока его действия, т. е. с началом периода отдачи. Так как $NPV_3(i) = -400 < 0$, $NPV_4(i) = 11{,}1 > 0$, то наименьшее целое $n^* \le 5$, при котором выполняется неравенство $NPV_{n^*}(i) \ge 0$, это $n^* = 4$ (точное значение меньше 4).

Таблица 4.1 – Расчет динамического срока окупаемости n^*

Денежный поток	Годы					
	0	1	2	3	4	5
R_k	–1000	–300	500	500	500	500
$R_k/(1+i)^k$	–1000	–286	454	432	411	392
$\Sigma R_k/(1+i)^k$	–1000	–1 000 – 286 = = – 1 286	– 1 286 + 454 = = – 832	– 400	11	403

При условии, что доход может выплачиваться и за часть года, точное значение находится по формуле

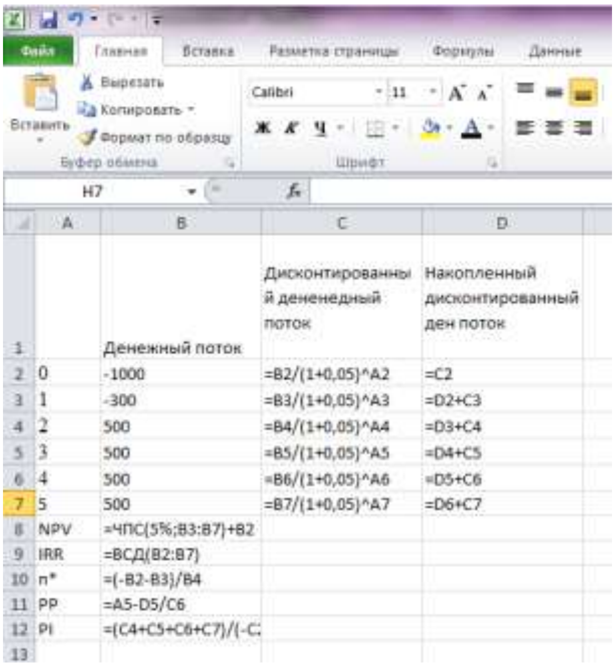
$$DPP = n^* = 3 - \frac{-400}{411} = 3{,}97 \text{ или 3 года и 355 дней.}$$

Вычислим индекс доходности:

$$PI = \frac{\frac{500}{(1+0{,}05)^2} + \frac{500}{(1+0{,}05)^3} + \frac{500}{(1+0{,}05)^4} + \frac{500}{(1+0{,}05)^5}}{1000 + 300/(1+0{,}05)} = 1{,}31.$$

Таким образом, на 1 денежную единицу вложенных средств, приходится 1,31 чистой прибыли.

Вычисление показателей эффективности инвестиционного проекта в MS Excel приводится на рисунке 4.1



	A	B	C	D
1		Денежный поток	Дисконтированный деденедный поток	Накопленный дисконтированный ден поток
2	0	-1000	=B2/(1+0,05)^A2	=C2
3	1	-300	=B3/(1+0,05)^A3	=D2+C3
4	2	500	=B4/(1+0,05)^A4	=D3+C4
5	3	500	=B5/(1+0,05)^A5	=D4+C5
6	4	500	=B6/(1+0,05)^A6	=D5+C6
7	5	500	=B7/(1+0,05)^A7	=D6+C7
8	NPV	=ЧПС(5%;B3:B7)+B2		
9	IRR	=ВСД(B2:B7)		
10	n*	=(-B2-B3)/B4		
11	PP	=A5-D5/C6		
12	PI	=(C4+C5+C6+C7)/(-C:		
13				

Рисунок 4.1 – Вычисление параметров инвестиционного проекта в MS Excel

4.6 Задачи для самостоятельного решения

1 Мясокомбинат планирует приобрести новое оборудование. Для этого необходимо подготовить помещение, что займет несколько месяцев. Подготовительные затраты равны 500 000 рублей. Оборудование стоимостью 3 000 000 рублей планируют приобрести в конце первого года и затем эксплуатировать в течение 3 лет. Денежный доход от эксплуатации этого оборудования за этот период по годам составит 1 000 000 рублей; 1 500 000 рублей и 2 000 000 рублей соответственно. Оцените инвестиционный проект, если уровень доходности по альтернативным вложениям составляет 10 %.

2 Предприятие закупило технологическую линию за 1 000 000 рублей, срок эксплуатации которой 6 лет. Денежный доход от использования оборудования по годам составит 250 000; 300 000; 350 000; 400 000; 450 000; 500 000 рублей соответственно. Определите индекс доходности, если норма дисконта составляет 20 %.

3 Компании необходимо вложить средства в покупку одного из двух станков. Более дорогой станок требует инвестиций на 5 000 рублей больше, но обеспечивает ежегодную экономию в 2 000 рублей в течение 5 лет. Стоимость капитала – 15 %. Приобретение какого станка является более эффективным?

5 Финансовые инвестиции

Ценная бумага, в каком бы виде она не существовала (бумажная или электронная форма), представляет собой некоторый поток платежей.

В зависимости от формы предоставления капитала и способа выплаты дохода, ценные бумаги делятся на *долговые* и *долевые*. *Долговые* ценные бумаги обычно имеют фиксированную процентную ставку и являются обязательством выплатить полную сумму долга с процентами на определенную дату в будущем (купонные облигации, сертификаты, векселя). *Долевые* ценные бумаги представляют собой непосредственную долю держателя в реальной собственности и обеспечивают получение дивидендов в неограниченное время.

Долговые и долевые ценные бумаги относятся к классу *основных финансовых инструментов*. Все прочие виды ценных бумаг являются *производными* от долговых либо от долевых ценных бумаг и закрепляют право владельца на их покупку или продажу. Это опционы, фьючерсные контракты, приватизационные чеки и т. д. Производные ценные бумаги представляют собой поток платежей, полученный при помощи некоторого преобразования потока платежей основных финансовых инструментов.

5.1 Облигации

5.1.1 Количественные показатели облигации

Облигации являются долговыми ценными бумагами и выпускаются в обращение государством или корпорациями. Основными параметрами облигации являются следующие:

1) N – *номинальная цена* (цена, напечатанная на облигации) – цена, используемая в качестве базы для начисления процентов;

2) P_b – *выкупная цена* (или правило ее определения) – цена, по которой производится выкуп облигации эмитентом по истечении срока займа (она может совпадать с номинальной стоимостью или определяться условиями займа);

3) n – срок облигации (дата погашения);

4) q – купонная процентная ставка;

5) r – полная доходность от облигации;

6) r_t – рыночная доходность (ставка альтернативных вложений);

7) P_t – рыночная цена;

8) P – внутренняя стоимость (расчетная цена).

Иногда вместо цены используется курс облигации (в процентах):

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 .$$

Разность между номиналом N и ценой P, если она ниже номинала, называется *дисконтом* (*скидкой, дезажио*). Разность между ценой P, если она выше номинала, и номиналом N называется *премией* (*ажио*).

Доход от облигации состоит из двух частей:

– проценты, периодически получаемые по купонам;

– разность между номиналом и ценой приобретения облигации.

По способам выплаты дохода облигации можно подразделить на следующие типы:

– *бессрочные облигации* – выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается;

– *облигации с нулевым купоном* – выплата процентов не предусматривается (дисконтные облигации);

– *сберегательные облигации* – проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока (например, облигации серии *EE* в США);

– *облигации общего типа* – периодически выплачиваются проценты, а в конце срока номинал (или выкупная цена). Этот тип облигаций является преобладающим (облигации с фиксированной купонной ставкой).

Доходность облигаций характеризуется показателями:

1) q – *купонная доходность*, определяемая при выпуске облигации;

2) $r_t = qN/P_t$ – *текущая доходность*, характеризующая отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации;

3) r – *полная доходность* (ставка помещения), измеряющая реальную эффективность инвестиций в облигацию (для инвестора) в виде годовой ставки сложных процентов.

Первые два показателя q и r_t не учитывают второго источника дохода по облигациям – получение номинала, или выкупной цены в конце срока, и поэтому их не используют при сравнении доходностей разных видов облигаций (например, у облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю, и в то же время они могут быть весьма доходными).

Показатель полной доходности r учитывает оба источника дохода и применяется для сравнения доходности инвестиций в облигации и другие ценные бумаги. Начисление процентов по полной доходности на цену приобретения облигации полностью обеспечивает выплату купонного дохода и сумму для погашения облигации в конце срока.

Ценная бумага имеет две взаимосвязанные *абсолютные характеристики*: объявленную текущую рыночную цену (P_t), по которой ее можно приобрести на фондовом рынке, и внутреннюю стоимость (P). Обе характеристики динамично меняются во времени, и с позиции конкретного инвестора часто не совпадают. Внутренняя стоимость P облигации может быть количественно оценена как дисконтированная стоимость будущих поступлений, генерируемых этой бумагой:

$$P = \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_k}{(1+r)^k} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{(1+r)^t},$$

где P_1, P_2, …, P_n – предполагаемые поступления;

r – требуемая инвестором норма прибыли.

Если i – безрисковая доходность (процентная ставка по банковским депозитам или ставка доходности государственных облигаций), r_p – надбавка за риск, то норма прибыли чаще всего равна $r = i + r_p$.

5.1.2 Определение расчетной цены и полной доходности

Оценка бессрочных облигаций. Бессрочная облигация предусматривает неопределенно долгую выплату дохода в установленном размере $C = qN$. В этом случае имеет место вечная рента постнумерандо, и современная стоимость при рыночной процентной ставке r_t равна $P = C/ r_t$ или $P = qN/ r_t$. Отсюда полная доходность равна $r = C/P_t$ или $r = qN/P_t$.

Пример 5.1. Бессрочная облигация с купонной ставкой 4,5 % годовых куплена по курсу 90 %. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются один раз в году?

Решение. Параметры облигации: K = 90 %, q = 4,5 %. По определению курса облигации имеем $K = P/N \cdot 100$ %. Отсюда $P = KN/(100\ \%)$. Тогда

$$r = C / P = qN /(KN) = 0{,}045/(0{,}90) = 0{,}05 \text{ или } 5\ \%.$$

Таким образом, полная доходность бессрочной облигации равна 5 %.

Оценка облигаций с нулевым купоном. Данный вид облигаций обеспечивает ее владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения. Поскольку денежные поступления по годам, за исключением последнего года, равны нулю, то внутренняя стоимость есть

$$P = N(1 + r)^{-n}.$$

Полная доходность данной облигации равна эффективной процентной ставке простейшей финансовой операции:

$$r = \sqrt[n]{N/P} - 1 \text{ или } r = \sqrt[n]{100/K} - 1.$$

С ростом курса доходность уменьшается, чем больше курс, тем больше цена, тем меньше доходность. С ростом срока n доходность также уменьшается.

Пример 5.2. Приобретается бескупонная государственная облигация номиналом 5 000 $, погашаемая через 25 лет. Оценить данную облигацию, если годовая рыночная процентная ставка r_t = 15%.

Решение. Параметры облигации: N = 5 000 $, n = 25 лет, r_t = 15 %. Облигация бескупонная, поэтому внутренняя стоимость равна

$$P = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}15)^{-25} = 150\ \$.$$

Таким образом, внутренняя стоимость облигации составляет 150 $.

Оценка сберегательных облигаций. Для сберегательной облигации проценты начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой вместе с номиналом. Купонного дохода нет. Сумма номинала N, наращенная по схеме сложных процентов по купонной ставке q за n периодов, равна $S = N(1 + q)^n$. Тогда внутренняя стоимость суммы S равна

$$P = \frac{N(1+q)^n}{(1+r_t)^n} \text{ или } P = N\left(\frac{1+q}{1+r_t}\right)^n.$$

Полная доходность определяется по формуле

$$r = \sqrt[n]{N(1+q)^n / P} - 1 \text{ или } r = (1+q)\sqrt[n]{100/K} - 1.$$

Пример 5.3. По облигации сроком 5 лет проценты по ежеквартально по купонной ставке 8 % годовых и выплачиваются одной суммой вместе с номиналом в конце срока. Рыночная процентная ставка r_t = 12 % годовых. Определить курс облигации.

Решение. Параметры облигации: q = 8 %, n = 5 лет, r_m = 12 %, m = 4. Внутренняя стоимость облигации равна

$$P = N\big(1 + q/m\big)^{mn}(1+r)^{-n}.$$

Отсюда курс облигации равен

$$K = \frac{P}{N}\cdot 100 = \frac{(1+q/m)^{mn}}{(1+r)^n}\cdot 100 = \frac{(1+0{,}08/4)^{4\cdot 5}}{(1+0{,}12)^5}\cdot 100 = 84{,}32.$$

Так как расчетная цена оказалась меньше номинала и $K < 100$, то имеет место облигация с дисконтом.

Оценка облигаций общего типа. Денежный поток при оценке облигаций с фиксированной купонной ставкой (с постоянным доходом) складывается из одинаковых по годам поступлений $C = qN$ и номинала N, выплачиваемой в момент погашения. Так как поступления по купонам образуют постоянную ренту постнумерандо с членом, равным C, то внутренняя стоимость облигации определяется по формуле:

$$P = N(1+r)^{-n} + C \cdot a^{(p)}_{n,r/m},$$

где $a^{(p)}_{n,r/m} = \dfrac{1-(1+r/m)^{mn}}{p\big((1+r/m)^{m/p}-1\big)}$ – коэффициент приведения p-срочной ренты с m разовым начислением процентов в году.

Полная доходность r облигации определяется из уравнения

$$-P + N(1+r)^{-n} + qN \cdot a^{(p)}_{n,r/m} = 0 \text{ или } -\frac{K}{100} + (1+r)^{-n} + q \cdot a^{(p)}_{n,r/m} = 0$$

одним из итерационных методов относительно r.

Замечание. В MS Excel последнее уравнение можно решить с помощью процедуры *Подбор параметра*.

Пример 5.4. Облигация со сроком 5 лет, по которой проценты выплачиваются один раз в году по ставке 8 %, куплена по курсу 97. Определить полную доходность облигации.

Решение. Параметры облигации: q = 8 %, n = 5 лет, K = 97. Уравнение для определения полной доходности имеет вид

$$-K/100 + (1+r)^{-n} + q \cdot a_{n,r} = 0$$

Полную доходность r определим с помощью процедуры *Подбор параметра*. Для этого в ячейку B4 зададим произвольное значение доходности, например 7 %. В ячейку B5 введем формулу для вычисления K (рисунок 5.1).

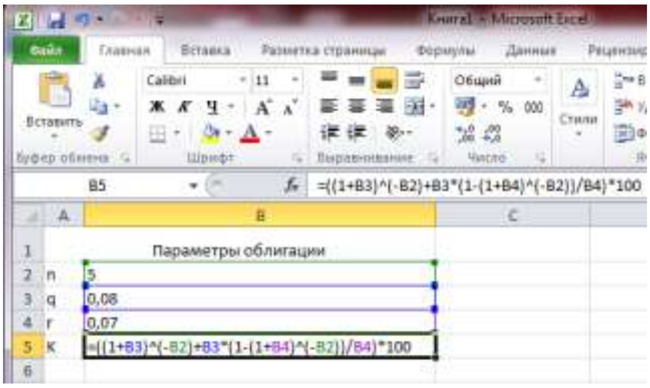


Рисунок 5.1 – Заполнение ячеек для расчета полной доходности

Курсор установим в ячейку B5 и выполним *Данные/Анализ «что если»/Подбор параметра.* В открывшемся диалоговом окне *Подбор параметра* заполним поля (рисунок 5.2) и нажмем Ok. В результате получим окно *Результат подбора параметра* (рисунок 5.3) и нажмем Ok.

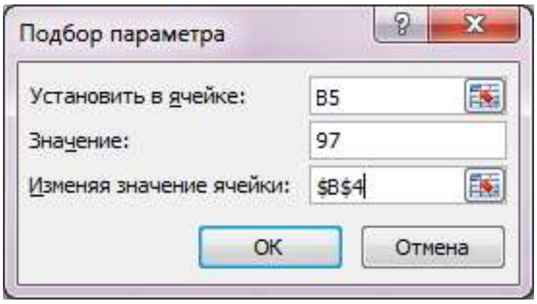


Рисунок 5.2 – Диалоговое окно *Подбор параметра*

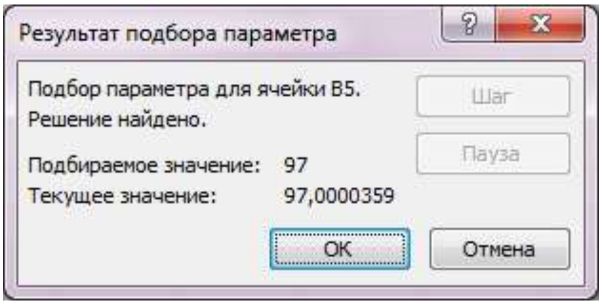


Рисунок 5.3 – Диалоговое окно *Результат подбора параметра*

Значение полной доходности определяется в ячейке B4 (рисунок 5.4).

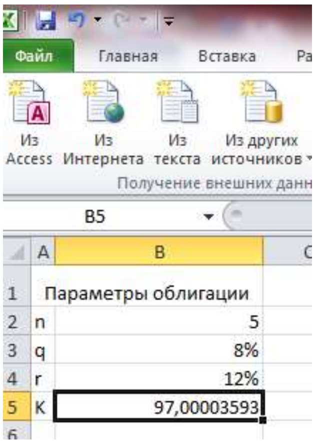


Рисунок 5.4 –Результат выполнения процедуры *Подбор параметра*

Таким образом, полная доходность облигации равна r = 12 %.

5.2 Операции с акциями

5.2.1 Внутренняя стоимость акции

Акции – это *долевые* ценные бумаги, представляющие собой долю в реальной собственности и обеспечивающие получение дивидендов в неограниченное время. Стоимость акции, указанная на ее бланке называется *номинальной стоимостью* акции. *Внутренняя стоимость* акции представляет собой расчетную цену, основанную на оценке будущих поступлений d_t по рыночной процентной ставке r и определяется по формуле

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} d_t (1+r)^{-t} .$$

Акции не имеют установленных сроков обращения, поэтому в определении внутренней стоимости рассматривается бесконечная сумма. В зависимости от потока платежей, характерного для того или иного класса акций, данная модель принимает конкретный вид. Обычно акции делят на два класса: *привилегированные* и *обыкновенные*.

Оценка привилегированных акций. Привилегированные акции определяют доход $d_t = d$ (d – дивиденд) неопределенно долго, поэтому их текущая стоимость находится по формуле современной стоимости вечной ренты по ставке альтернативных вложений с поправкой на риск:

$$P = d/r.$$

В некоторых странах привилегированные акции эмитируются на условиях, которые позволяют эмитенту выкупать их в определенный момент времени по соответствующей цене. Для определения расчетной цены используется модель, которая соответствует цене облигаций общего типа:

$$P = F \cdot (1 + r)^{-n} + d \cdot a_{n,r} ,$$

где d – дивиденды;

$a_{n,r}$ – коэффициент приведения;

F – выкупная цена;

n – срок выкупа.

Пример 5.5. Определить внутреннюю стоимость привилегированной акции номиналом 100 000 ден. ед. Дивиденды начисляются по ставке 9 % годовых. Рыночная процентная ставка – 12 % годовых.

Решение. Расчетная цена привилегированной акции равна

$$P = \frac{0{,}09 \cdot 100\,000}{0{,}12} = 75\,000 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, текущая стоимость равна 75 000 ден. ед.

Модели оценки обыкновенных акций. Основную долю акций составляют *обыкновенные акции*, владельцы которых юридически являются совладельцами долей компании (доля определяется отношением суммы акций владельца к общему их выпуску). Оценка стоимости обыкновенных акций зависит от динамики величины дивидендов. Обычно рассматриваются три варианта динамики: 1) величина дивидендов не меняется; 2) дивиденды возрастают с постоянным темпом прироста; 3) дивиденды возрастают с изменяющимся темпом прироста. При оценке акций основными являются варианты динамики прогнозных значений дивидендов.

Модель оценки обыкновенных акций *с постоянной величиной дивидендов* аналогична ситуации с привилегированными акциями, так как потоки платежей по акциям одинаковы, т. е. выплата платежей с фиксированным членом неограниченное время: $P = d/r$.

Модель бессрочного роста (дивиденды возрастают с постоянным темпом прироста) предполагает, что базовая величина дивиденда равна d и ежегодно увеличивается с темпом прироста g. Поэтому ожидаемый уровень дивидендов в t-м периоде равен $d(1 + g)^t$. Тогда внутренняя стоимость облигации равна

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d(1+g)^t}{(1+r)^t} = d \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t .$$

При $r > g$ формула преобразуется к виду:

$$V_t = d\,\frac{1+g}{r-g},$$

которая называется *моделью Гордона*.

Модель с изменяющимися темпами прироста дивидендов. При оценке акций, дивиденды которых возрастают с изменяющимся темпом прироста, используется *модель переменного роста*. Рассмотрим варианты.

1 Предположим, что инвестор прогнозирует, что с высокой вероятностью наступит такой период s, после которого дивиденды будут расти с постоянным темпом g. До наступления s-го периода инвестор прогнозирует величину дивидендов по годам в размере: d_1, d_2, d_s. В этом случае внутренняя стоимость акции определяется по формуле:

$$P = \frac{d_1}{1+r} + \frac{d_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{d_s}{(1+r)^s} + \frac{d_s(1+g)}{r-g} \cdot \frac{1}{(1+r)^s}.$$

2 Согласно формуле Гордона текущая цена обыкновенной акции очень чувствительна к параметру g: даже незначительное его изменение может существенно повлиять на цену. Поэтому в расчетах иногда пытаются разбить интервал прогнозирования на подынтервалы, каждый из которых характеризуется собственным темпом прироста. Так, если выделить два подынтервала с темпами прироста g и q соответственно, то согласно модели бессрочного роста получим:

$$P = d_0 \sum_{t=1}^{s} \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t} + d_s \cdot \sum_{t=s+1}^{\infty} \frac{(1+q)^t}{(1+r)^t} = d_0 \sum_{t=1}^{s} \frac{(1+g)^t}{(1+q)^t} + d_s \frac{(1+q)}{r-q} \cdot \frac{1}{(1+r)^s},$$

где d_0 – дивиденд, выплаченный в базисный момент времени;

d_1 – прогноз дивиденда в s-м периоде;

g – прогноз темпа прироста дивиденда в первые s периодов;

q – прогноз темпа прироста дивидендов в последующие периоды.

5.2.2 Доходность операций с акциями

Перечисленные модели оценки стоимости акций в качестве основного параметра включают *дивиденды*, размер которых определяется в соответствии с дивидендной политикой фирмы. В теории дивидендной политики существуют два различных подхода.

1 Начисление дивидендов по остаточному принципу, согласно которому считается, что в условиях совершенной конкуренции дивидендная политика не влияет на эффективность инвестиций в акции. Поэтому *оптимальная стратегия* в дивидендной политике – начисление дивидендов после того, как проанализированы все возможности для эффективного реинвестирования прибыли. Если всю прибыль целесообразно использовать для реинвестирования, то дивиденды не выплачиваются. Если у предфоиры нет рациональных инвестиционных проектов, прибыль в полном объеме направляется на выплату дивидендов.

Доход, получаемый от акции, состоит из двух частей: дивиденда d и разницы между ценой покупки P_0 и ценой продажи P_1. Поэтому доходность r акции за период владения определяется по формуле

$$r = \frac{P_1 - P_0 + d}{P_0}.$$

Пусть i доля прибыли, идущая на выплату дивидендов, K_0, K_1 – капитал фирмы в начале и в конце периода соответственно, N – число акций фирмы (число акций предполагается неизменным).

Тогда цена акции в начале периода не зависит от параметра i и определяется выражением $P_0 = K_0/N$.

И пусть за фиксированный период фирма заработала прибыль

$$\pi = K_1 - K_0 = r_n \cdot K_0,$$

где $r_n = (K_1 - K_0)/K_0$ – эффективность капитала.

Тогда размер дивиденда на каждую акцию есть $d = i\,\pi/N = r_n \cdot K_0/N$.

Капитал K_1, оставшийся в распоряжении фирмы и способный далее приносить прибыль, равен $K_1 = K_0 + (1 - i)\,\pi = K_0(1 + (1 - i)\,r_n)$. Таким образом, цена в конце периода определяется по формуле

$$P_1 = K_1/N = K_0(1 + (1 - i)\,r_n)/N.$$

Подставляя в формулу для доходности r, получим

$$r = \frac{\left(1 + (1 - i)r_n\right)K_0/N - K_0/N + i\,r_n K_0/N}{K_0/N} = \left(1 + (1 - i)r_n\right) - 1 + i\,r_n = r_n.$$

Таким образом, *доходность акции за период равна продуктивности фирмы за этот период*. Если инвестор не собирается продавать акцию, то через период он будет иметь акцию с новой ценой и дивиденды наличными. Капитал, вложенный в акцию фирмы, будет иметь доходность, равную ее продуктивности. Капитал же, полученный как дивиденд, может быть вложен в любую другую операцию на рынке. Поэтому, если $r_n = r$, где r – рыночная процентная ставка, то справедливо утверждение Модильяни-Миллера: дивидендная политика фирмы не влияет на совокупное благосостояние акционеров. Если рыночная процентная ставка больше продуктивности фирмы, инвестор может вложить полученный дивиденд с большей для себя выгодой.

2 *Максимизация совокупного благосостояния акционеров (модель Гордона)*, основными предпосылками которого являются:

1) принцип минимизации риска: инвесторы предпочитают текущие дивиденды возможным будущим точно так же, как и возможному приросту акционерного капитала;

2) продуктивность капитала корпорации не меняется, $r_n = \text{const}$;

3) дивидендная политика корпорации не меняется, $i = \text{const}$.

Тогда в соответствии с основным методом, основанным на дисконтировании будущих платежей по рыночной процентной ставке r:

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_t}{(1 + r)^t},$$

где d_t – прогнозное значение дивиденда в t-м периоде.

В рамках второй и третьей предпосылок модели коэффициент наращения капитала за t периодов равен $K_1 = K_0(1 + (1 - i)\, r_n)^t$. Тогда величина дивиденда за период t определяется выражением

$$d_t = i\pi_{t-1}/N = ir_nK_{t-1}/N = ir_n K_0(1 + (1 - i)\, r_n)^t/N,\ t = 1, 2, \dots .$$

Цена акции в начальный момент времени равна

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{ir_nK_0\left(1+(1-i)\right)^{t-1}}{N(1+r)^t} = \frac{K_0}{N} \cdot \frac{i\,r_n}{r - r_n + i\,r_n}.$$

Если акционер не может добиться большей доходности, инвестируя дивиденды в другие финансовые операции, то он предпочтет вложить их в акции своей фирмы. При этом $r_n = r$ и $P_0 = K_0/N$, т. е. цена не будет зависеть от параметра i, совпадая с формальным значением. Поскольку в условиях идеальной конкурентной экономики отсутствует возможность более эффективных конкурентных вложений, подход Модильяни-Миллера оправдан.

Замечание. В настоящее время не существует единого формализованного алгоритма в выработке дивидендной политики. Она определяется многими факторами, в том числе и трудно формализуемыми. Поэтому каждая фирма при выборе подхода ориентируется на свои особенности.

Пример 5.6. Чистая прибыль фирмы за год составила 17,3 млн руб. Рыночная процентная ставка равна 17 % годовых. Имеется два варианта обновления: 1) реинвестирование 50 %-ной прибыли; 2) реинвестирование 20 %-ной прибыли. В первом случае годовой темп прироста прибыли составит 8 %, во втором – 3 % годовых. Какая дивидендная политика предпочтительна в рамках подхода максимизации совокупного дохода акционеров?

Решение. Рассчитаем величину дивидендов по двум вариантам за текущий год:

1) d = 17,3·0,50 = 8,65 млн руб; 2) d = 17,3·0,80 = 13,84 млн руб.

Оценим стоимость кций согласно модели Гордона:

1) P = 8,65·(1 + 0,08)/(0,17 – 0,08) = 103,8 млн руб;

2) P = 13,84·(1 + 0,03)/(0,17 – 0,03) = 101,84 млн руб.

Вычислим совокупный доход акционеров:

1) 8,65 + 103,8 = 112,45 млн руб; 2) 13,84 + 101,84 = 115,68 млн руб.

Видно, что второй вариант обеспечивает больший совокупный доход.

5.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Бессрочная облигация с купонной процентной ставкой 4,5 % годовых куплена по курсу 90. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются поквартально?

2 Облигации с нулевым купоном номиналом 1 000 руб. и сроком погашения через пять лет продаются за 560,35 руб. Проанализируйте целесообразность приобретения этих облигаций, если имеется возможность альтернативного инвестирования с нормой прибыли 14 %.

3 Определите внутреннюю стоимость бессрочной облигации, если выплачиваемый по ней годовой доход составляет 1 000 руб., а приемлемая норма прибыли – 16 %.

4 Номинал облигации, до погашения которой остается 5 лет, равен 1 000 руб., купон 10 % выплачивается один раз в год. Определите цену облигации, чтобы она обеспечила доходность до погашения в размере 15 % годовых.

5 Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 6 000 руб. на акцию в конце каждого года в течение длительного времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 35 000 руб., если можно поместить деньги на депозит под 15 % годовых?

6 Компания за прошедший год выплатила 2 700 руб. на акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 4 % ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 20 000 руб., если можно поместить деньги на депозит под 14 % годовых.

7 За прошедший год компания выплатила в качестве дивидендов по 10 $ на акцию. Ожидается, что в течение следующих трех лет дивиденд будет расти на 3 % в год, затем темп прироста снизится до 2 % в год на весь оставшийся период. Определите теоретическую стоимость акции, если рыночная норма прибыли составляет 10 %.

8 Определите доходность привилегированной акции с постоянным дивидендом, равным 60 руб., если ее текущая рыночная цена равна 1 000 руб.

9 Инвестор приобрел акцию за 5 000 руб. и продал через 3 года за 8 000 руб. За первый год инвестору выплатили дивиденд 300 руб., за второй – 450 руб., за третий – 600 руб. Определите доходность операции.

10 Акция куплена за 50 $. Прогноз дивиденда следующего года равен 2 $. Ожидается, что в последующие годы он будет возрастать с темпом 10 %. На какую доходность рассчитывал инвестор при покупке акции.

6 Финансовые расчеты в страховании

6.1 Финансовые потоки в страховании

Страховщик – специализированная организация, проводящая страхование. Страхователь – физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком. Объекты и предметы страхования – подлежащие страхованию материальные ценности, в личном страховании – жизнь, здоровье и трудоспособность страхователя или застрахованного лица. Страховая сумма – сумма денежных средств, на которую фактически застрахованы имущество, жизнь, здоровье. Страховой тариф – процентная ставка от совокупной страховой суммы, которая служит основой для формирования страхового фонда.

Финансовые расчеты в страховании (актуарные расчеты) базируются на следующих принципах:

– финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика, согласно которому теоретическая себестоимость страховой операции – нетто-премия должна быть равна стоимости страхования;

– учет фактора времени, который достигается с помощью дисконтирования платежей – приведения их к начальному моменту времени;

– солидарность застрахованных, согласно которой подразумевает согласованность интересов.

Совокупность страховых взносов и выплат, производимых в разные моменты времени можно рассматривать как вероятностные потоки платежей. Заранее количество платежей в таких потоках неизвестно, поскольку взносы производятся лишь за живущих участников страхования. Выплаты также получают только живущие (за исключением страхования на случай смерти, когда выплата осуществляется в случае смерти застрахованного лица). Каждый член такого потока связан с некоторой вероятностью дожития. Такой поток называется условным или *страховым аннуитетом*.

Модель потока платежей, учитывающая все требования к взносам и выплатам, позволяет получить актуарная стоимость страховых выплат (или взносов). Под *актуарной стоимостью потока платежей* понимается сумма последовательных платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, с учетом вероятностей их выплат.

6.2 Структура тарифной ставки

Для определения размера денежных выплат каждого страхователя, как участника солидарной ответственности, рассчитывается тарифная нетто-ставка, используемая для расчета страхового платежа – основного источника дохода страховщика. Расчет нетто-ставки базируется на оценке вероятности наступления страховых случаев.

Нетто-ставка – основная часть страхового тарифа, которая формирует страховой фонд и устанавливается условиями страхования. Для рисковых видов страхования в состав нетто-ставки включается рисковая надбавка, которая учитывает отклонения возможных выплат от их среднего уровня и формирует запасной фонд. Страховой и запасной фонды предназначены для расчетов со страхователями: выплаты суммы страховых возмещений, отчислений в резервный фонд, отчислений на предупредительные мероприятия.

Брутто-ставка P включает в себя нетто-ставку H и нагрузку f. Нагрузка f обеспечивает расходы на ведение дела и прибыль страховой кампании. Нагрузка, как правило, составляет 10–20 % брутто-ставки. Брутто-ставка может быть рассчитана на основе соотношения:

$$P = \frac{H}{1 - f}.$$

6.3 Страхование жизни

Рассмотрим основные виды страхования жизни.

Страхование на дожитие. Выплата производится при условии дожития застрахованного лица до определенного возраста и полной оплаты соответствующего договора очередными или единовременными взносами.

Страхование на случай смерти. Страховая сумма выплачивается только при наступлении смерти застрахованного в период действия договора.

Страхование от несчастных случаев. Выплата производится, если физическое лицо пострадает от несчастного случая.

Смешанное страхование жизни. Этот вид страхования объединяет в одном договоре страхование на дожитие, на случай смерти и страхование от несчастных случаев. Нетто-ставка по смешанному страхованию рассчитывается как сумма нетто-ставок его составляющих.

Условия страхования жизни обычно предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания действия договора страхования или в случае его смерти в течение этого срока.

Вероятность дожить до определенного возраста или окончания срока страхования зависит в первую очередь от возраста в момент страхования и срока действия договора страхования жизни. Вероятность дожития определяется с помощью таблицы смертности населения. Таблица разработана на основе данных демографической статистики (дифференцированно для мужчин и женщин). Таблица содержит конкретные цифры смертности для каждого возраста в расчете на 100 000 населения. На основе этих таблиц рассчитывают страховые тарифы.

Возраст человека обозначается x, а число лиц, доживающих до возраста x, обозначается l_x. Число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$ обозначается d_x. Вероятность умереть в возрасте x лет, не дожив до возраста $x + 1$ лет, равна $q_x = d_x/l_x$.

Величина страхового фонда, необходимого для выплаты в обусловленные сроки страховых сумм, определяется с помощью таблиц смертности. Определяя современную стоимость страхового фонда, страховщик находит сумму, которую необходимо собрать со страхователей в момент заключения договора страхования.

Страховые взносы могут вноситься единовременно при заключении договора страхования или ежегодно, образуя финансовую ренту.

6.4 Определение единовременной нетто-ставки

Единовременная нетто-ставка по дожитию. Условия страхования предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания срока договора. С помощью таблицы смертности устанавливается вероятное число выплат по дожитию застрахованного лица до окончания срока страхования. На основе данных о страховых суммах определяется размер страхового фонда, необходимого для страховых выплат.

Предположим, страхователь в возрасте x лет заключил договор со страховщиком, согласно которому последний выплатит ему сумму S при достижении возраста $x + n$ лет. Вероятность дожития до возраста x есть

$$p_x = l_{x+n}/l_x,$$

где l_x – число лиц, заключивших договор страхования в x лет;

l_{x+n} – число лиц, доживших до окончания договора страхования.

Математическое ожидание выплаты составит ${}_np_x{\cdot}S$. Дисконтируя эту величину по сложной процентной ставке i, определим математическое ожидание дисконтированной страховой выплаты, т. е. актуарную стоимость страховой выплаты (величину единовременного взноса):

$$A = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot S \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot (1+i)^n} S\ .$$

Предположим, S = 1 ден. ед. Тогда единовременная нетто-ставка по страхованию на дожитие определяется по формуле ${}_nE_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x(1+i)^n}$.

При единовременном взносе страхователь сразу при заключении договора погашает свои обязательства перед страховщиком и в дальнейшем не производит никаких дополнительных взносов.

Единовременная нетто-ставка на случай смерти. Этот вид страхования является наиболее распространенным. Страховая сумма, равная S выплачивается в случае смерти застрахованного. Допустим договор заключен в возрасте x лет. Если застрахованный умрет на первом году страхования, а выплата страховых сумм наследникам производится в конце года наступления страхового события, то современная величина выплаты (на момент заключения договора) составит: $q_x \cdot \dfrac{S}{1+i} = \dfrac{d_x}{l_x} \cdot \dfrac{S}{1+i}$. Если страховой случай наступит во втором году, то современная величина выплаты равна: $\dfrac{d_{x+1}}{l_x} \cdot \dfrac{S}{(1+i)^2}$, т. д. Единовременная нетто-ставка в расчете на одну ден. ед. страховой суммы (S = 1) определяется на основе принципа эквивалентности обязательств, в соответствии с которым искомая сумма должна быть равна математическому ожиданию суммы страховых выплат:

$$_nA_x = \frac{d_x}{l_x}\frac{1}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{l_x}\left[\frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right],$$

где d_x, …, d_{x+n-1} – количество умерших в течение срока страхования.

При смешанном страховании на дожитие и на случай смерти совокупная нетто-ставка определяется по формуле: $T_n = {}_nE_x + {}_nA_x$.

6.5 Расчет годичной нетто-ставки

При расчете единовременной нетто-ставки предполагается, что сумма подлежащих оплате взносов погашается единовременно в момент заключения договора о страховании. Однако чаще всего страхователи предпочитают платить взносы в течение всего срока страхования. В связи с этим возникает необходимость расчета годичных нетто-ставок.

Единовременная нетто-ставка отличается по величине от годичной ставки по ряду причин. Во-первых, при единовременной уплате страхового взноса он может быть сразу после его поступления инвестирован под проценты. Годичные же взносы поступают постепенно, в связи с чем сумма начисленных процентов будет значительно меньше, чем при единовременном взносе. В результате страховщик получит меньший страховой фонд. Во-вторых, страховой фонд выплачивают все лица, заключившие страховой договор, а при годичной уплате ряд страхователей прекратит взносы в результате своей смерти.

Следовательно, при расчете годичной нетто-ставки необходимо учитывать частичную потерю сумм и снижение числа платежей в результате смерти некоторой части застрахованных.

Предположим, что все мужчины, достигшие возраста x лет, обязались в конце каждого страхового года вносить страховой компании одну ден. ед. в течение n лет. Тогда в конце первого года будет внесено $l_{x+1}\cdot 1$ ден. ед. Современная стоимость этой суммы составит $l_{x+1}/(1 + i)$, где i – норма накопления данной страховой компании. Во втором году современная стоимость взносов составит $l_{x+2}/(1 + i)^2$, в n году – $l_{x+n}/(1 + i)^n$.

Таким образом, современная стоимость финансовых обязательств страховщика, относящихся ко всем l_x лицам, равна

$$ {}_nA_x = \frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^2} + \frac{l_{x+3}}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}. $$

Современная стоимость финансовых обязательств по отношению к одному лицу, т. е. годичная нетто-ставка, равна

$$ {}_na_x = \frac{1}{l_x}\left(\frac{l_{x+1}}{1+i} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{l_{x+n}}{(1+i)^n}\right). $$

Значение ${}_na_x$ можно рассматривать как коэффициент рассрочки. Зная его значение, можно определить годичный взнос по формуле

$$ {}_nP_x = {}_nE_x / {}_na_x, $$

где ${}_nE_x$ – единовременная нетто-ставка.

6.6 Задачи для самостоятельного решения

1 Страховщик заключил договор страхования с мужчиной 45 лет на 5 лет на дожитие на сумму 20 000 руб. Определите единовременную страховую премию при условии, что нагрузка составляет 10 %. Страховщик предполагает сумму страховых взносов инвестировать под 9 % годовых.

2 Определите единовременную нетто-ставку и страховую премию для мужчины 55-летнего возраста, оформляющего страховку на случай смерти сроком на 5 лет на сумму 10 000 руб. Страховая компания предполагает поместить страховую сумму под 9 % годовых. Нагрузка составляет 12 %.

3 Мужчина в возрасте 45 лет заключил договор по смешанному страхованию жизни сроком на 3 года. Страховая сумма равна 25 000 руб. Норма доходности страховой компании – 8 %. Доля нагрузки в брутто-ставке 10 %. Определите единовременную брутто-ставку и брутто-премию; коэффициент рассрочки и величину годичного взноса.

Список использованных источников

1 Бабешко, Л. О. Математическое моделирование финансовой деятельности: учебное пособие / Л. О. Бабешко. – М.: Финакадемия, 2008. – 192 с.

2 Бочаров, П. П. Финансовая математика: учебник / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002. – 624 с.

3 Капитоненко, В. В. Финансовая математика и ее приложения: учебно-практическое пособие / В. В. Капитоненко. – М.: ПРИОР,1998. – 144 с.

4 Кирлица, В. П. финансовая математика: руководство к решению задач: учебное пособие / В. П. Кирлица. – Мн. : ТетраСистемс, 2005. – 192 с.

5 Ковалев, В. В. Курс финансовых вычислений: учебник / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 560 с.

6 Лукасевич, И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений: учебное пособие / И. Я. Лукасевич. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

7 Малыхин, В. И. Финансовая математика: учебное пособие / В. И. Малыхин. – 2-е изд., перераб. и доп. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 247 с.

8 Мелкумов, Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие / Я. С. Мелкумов. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 383 с.

9 Четыркин, Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов: учебник / Е. М. Четыркин. – М.: «Дело», 2005. – 400 с.

Производственно-практическое издание

Марченко Лариса Николаевна,
Федосенко Людмила Васильевна,
Боярович Юлия Сигизмундовна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА:
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Практическое руководство
для студентов специальности
1-25 01 04 «Финансы и кредит»

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать ______ (__) Формат 60х84 1/16. Бумага писчая №1.

Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л.2,8. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 25 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104